

# Progettazione laminati

Equazioni costitutive laminato

Criteri di rottura

Il sublaminato

The ranking method

Disposizione strati e regole per un buon design

# Laminated plate theory

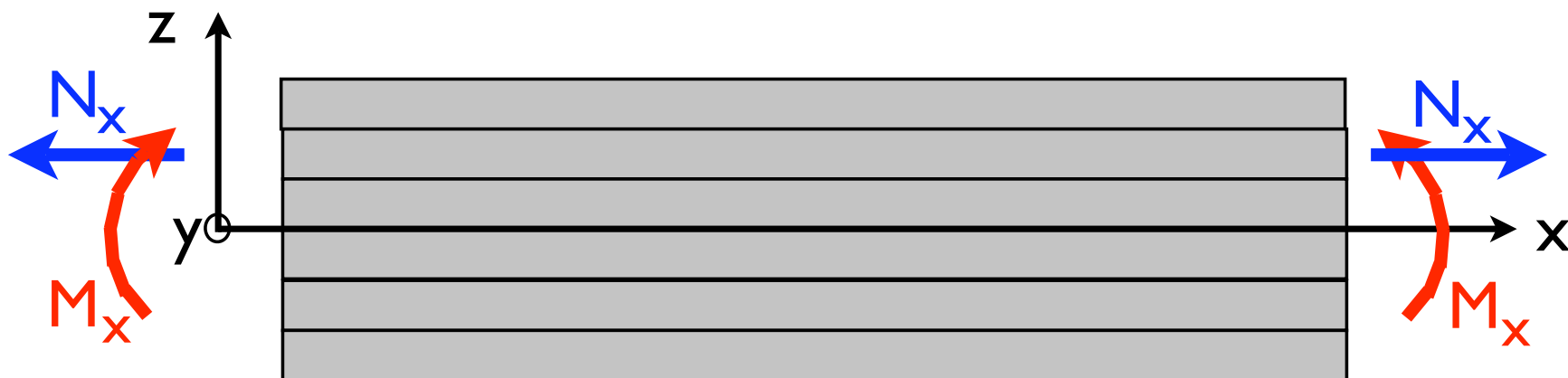
- L'ipotesi base della teoria è che la normale al laminato non si deforma, cioè rimane rettilinea. L'assunzione è ragionevole per piastre sottili.
- Quindi le deformazioni sono lineari in  $z$  (la normale):

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^0 + z\underline{k}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 + zk_i \quad i = x, y, s$$



# Carichi applicati e bilancio degli sforzi



$$\underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} \underline{\varepsilon} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} dz \underline{\varepsilon}^0 + \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} z dz \underline{k} = \underline{A} \underline{\varepsilon}^0 + \underline{B} \underline{k}, \quad \text{in N/m}$$

$$\underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} \underline{\varepsilon} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} z dz \underline{\varepsilon}^0 + \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} z^2 dz \underline{k} = \underline{B} \underline{\varepsilon}^0 + \underline{D} \underline{k}, \quad \text{in N}$$

$$\underline{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} dz \qquad \underline{B} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} z dz \qquad \underline{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{Q} z^2 dz$$

## Equazioni costitutive laminato

- L'integrazione si trasforma in una sommatoria considerando che in ogni strato  $Q$  è costante (sostituiamo inoltre  $Q$  con  $Q'$  nell'ipotesi generale che ogni strato possa essere orientato di un certo angolo):

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^m \underline{\underline{Q}}' (z_i - z_{i-1}), \quad \text{in N/m}$$

$$\underline{N} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{B}} \underline{k}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \underline{\underline{Q}}' (z_i^2 - z_{i-1}^2), \quad \text{in N}$$

$$\underline{M} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{D}} \underline{k}$$

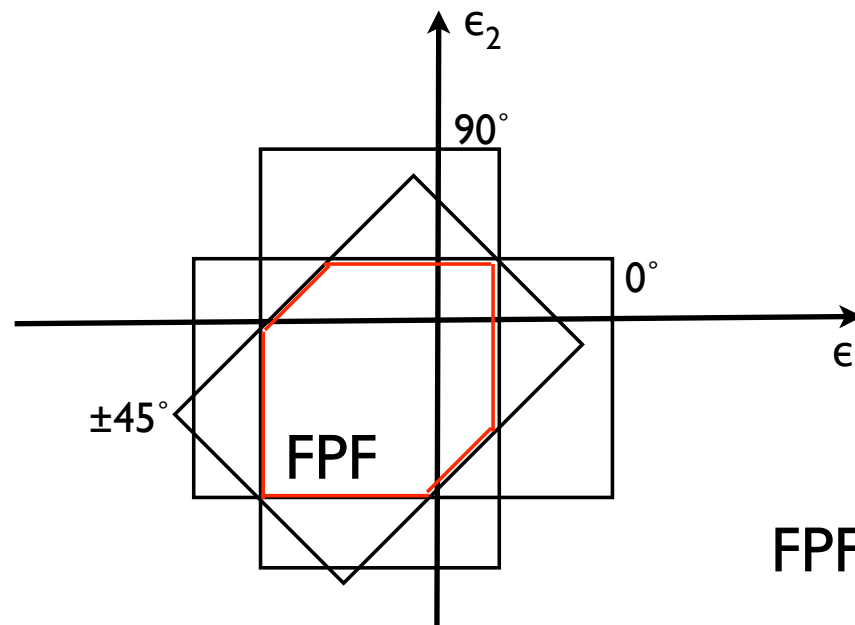
$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \underline{\underline{Q}}' (z_i^3 - z_{i-1}^3), \quad \text{in Nm}$$

$m$  = numero di laminati

la matrice  $B$  è la matrice di accoppiamento tra sforzi e momenti e risulta  $B = 0$  con un laminato simmetrico

# Resistenza del laminato

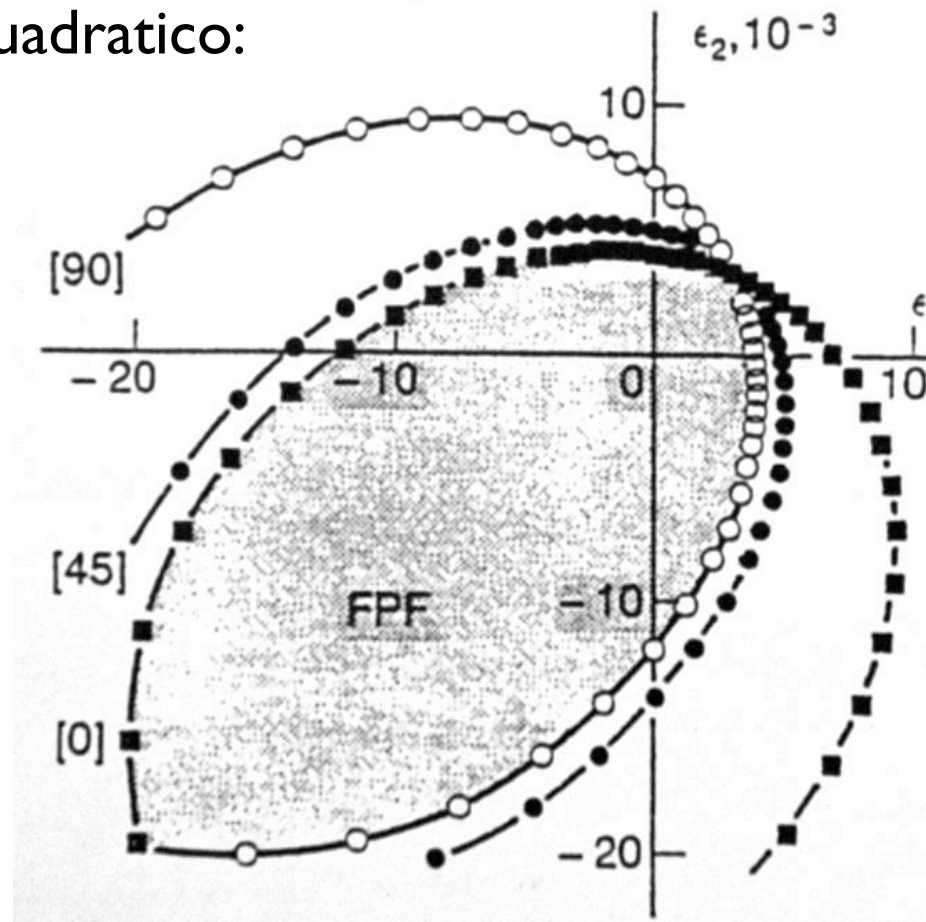
- Poichè i vari strati sono incollati uno sull'altro, dobbiamo considerare la compatibilità delle deformazioni all'interfaccia. Per determinare la resistenza a rottura del laminato lavoriamo sulle deformazioni.
- In base al criterio della massima deformazione (criterio lineare) e considerando un laminato  $\pi/4$   $[0,-45,45,90]$ :



FPF=First Ply Failure

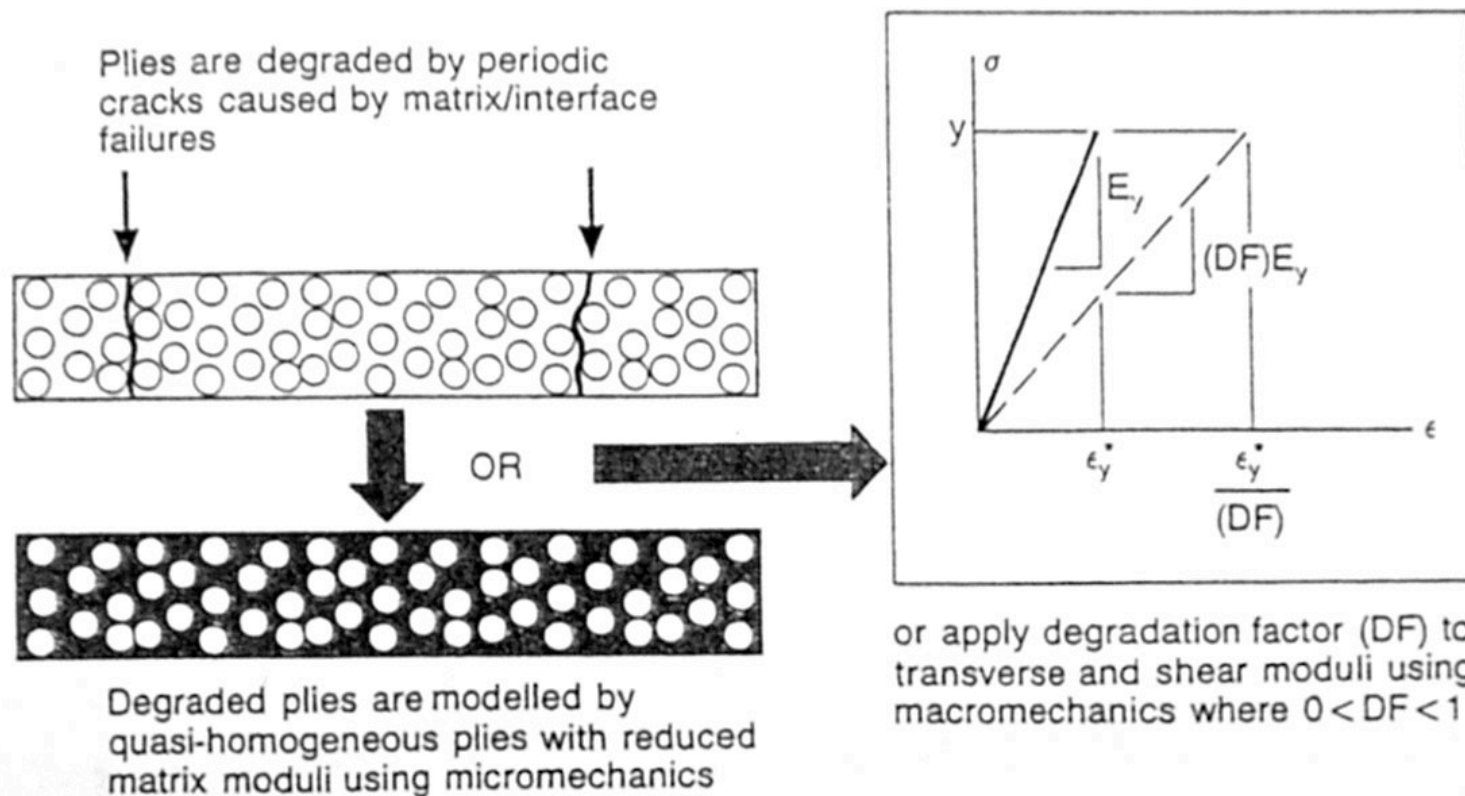
# First Ply Failure (FPF)

- Per il criterio della rottura del primo strato si considera rottura del laminato quando si rompe il primo strato.
- Per il criterio quadratico:

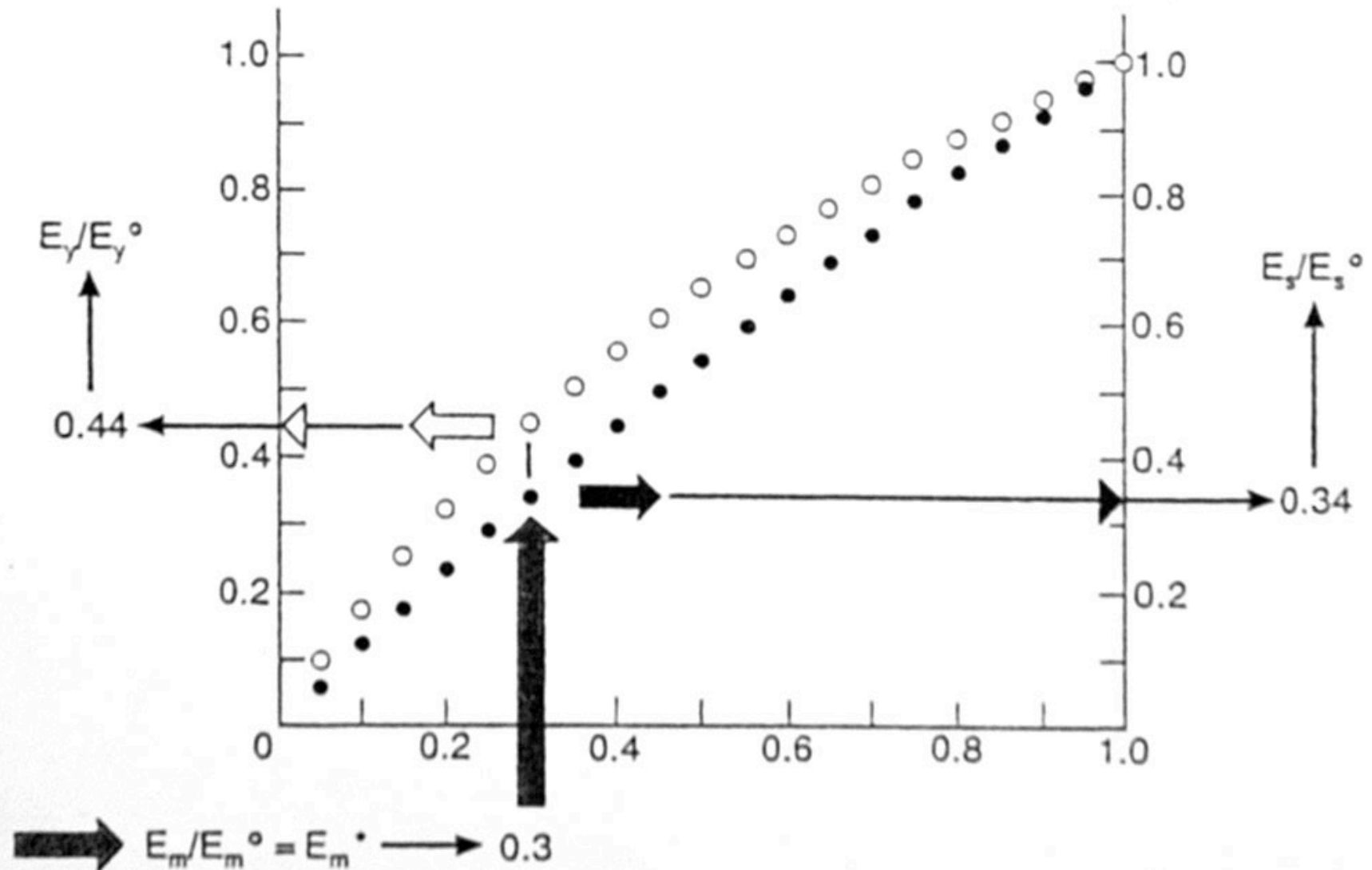


# Last Ply Failure (LPF)

- In realtà bisogna considerare che con la rottura del primo strato non si ha in realtà la rottura dell'intero laminato.
- Si considera uno strato degradato al posto di quello rotto.

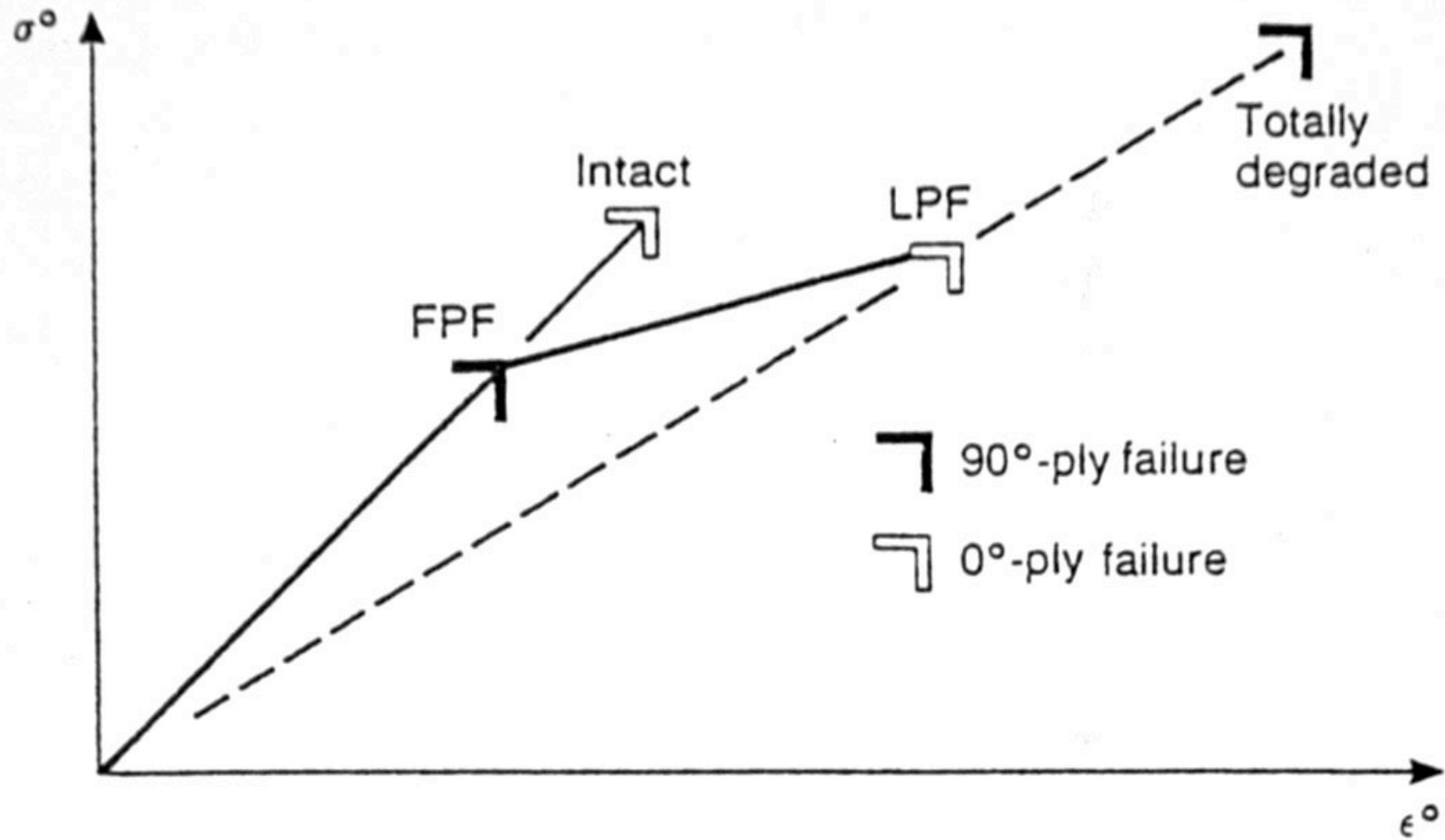


# Degradazione del modulo elastico

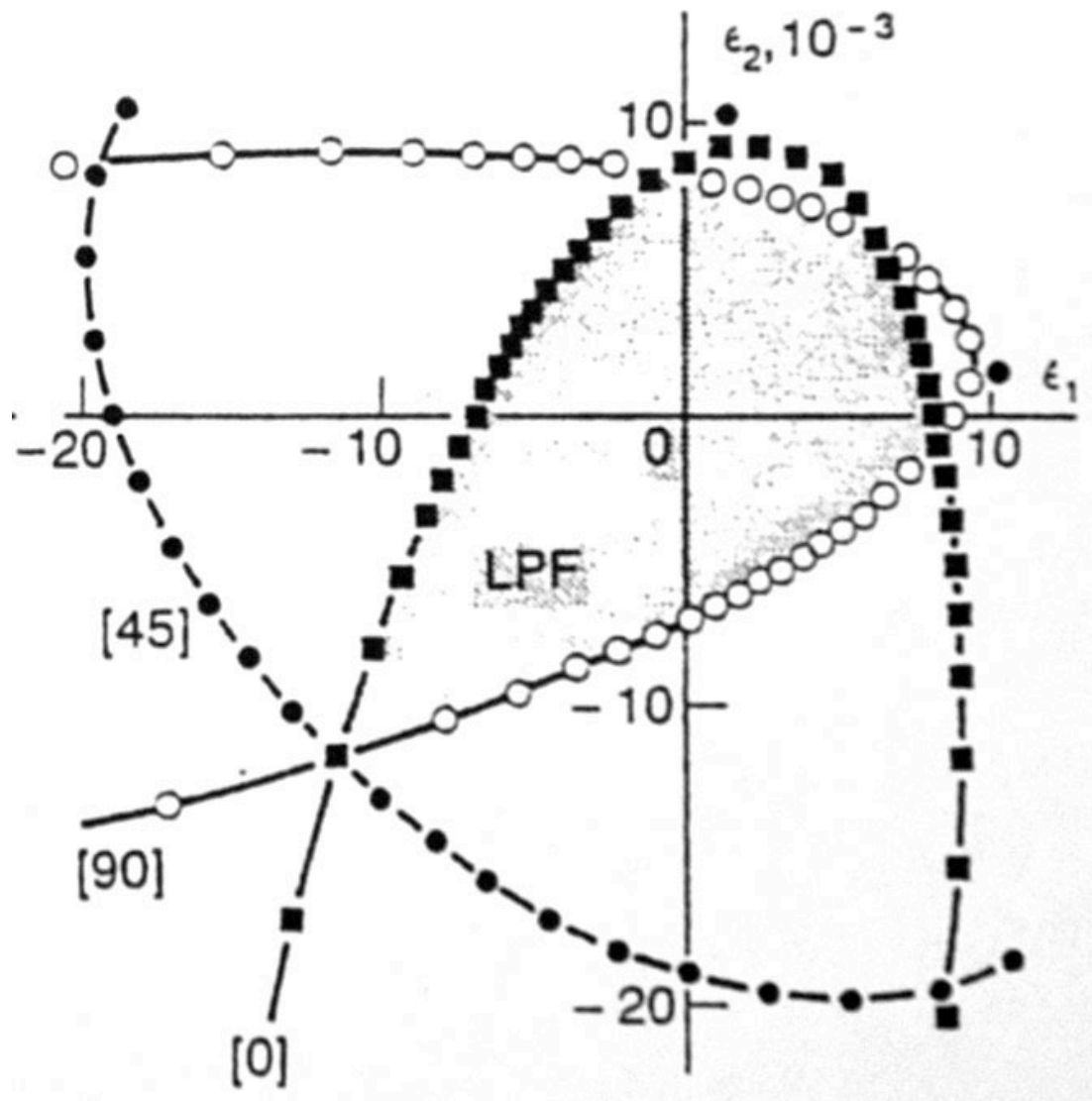




# Confronto LPF - FPF

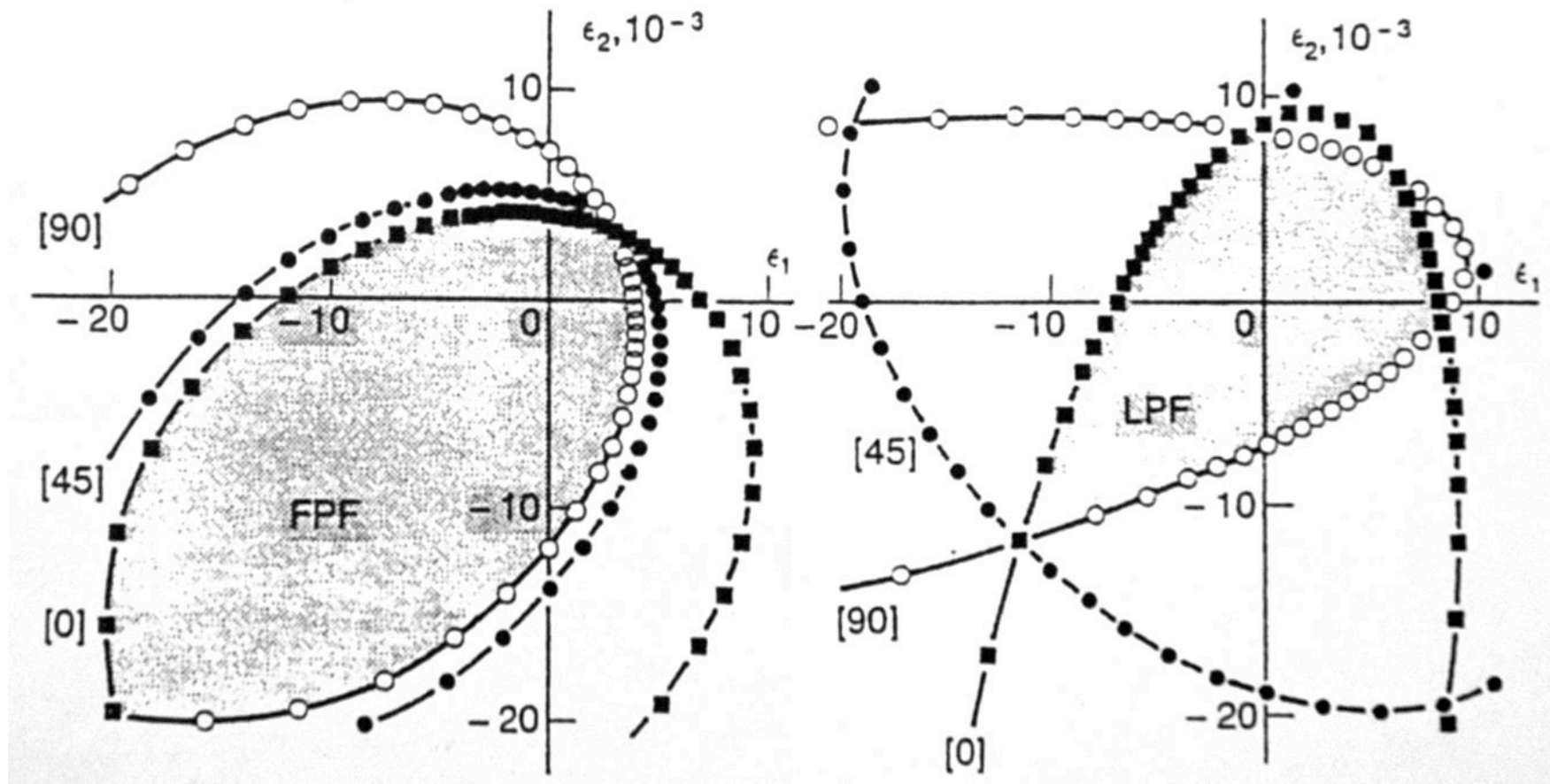


# LPF nel criterio quadratico



# LPF-FPF nel criterio quadratico

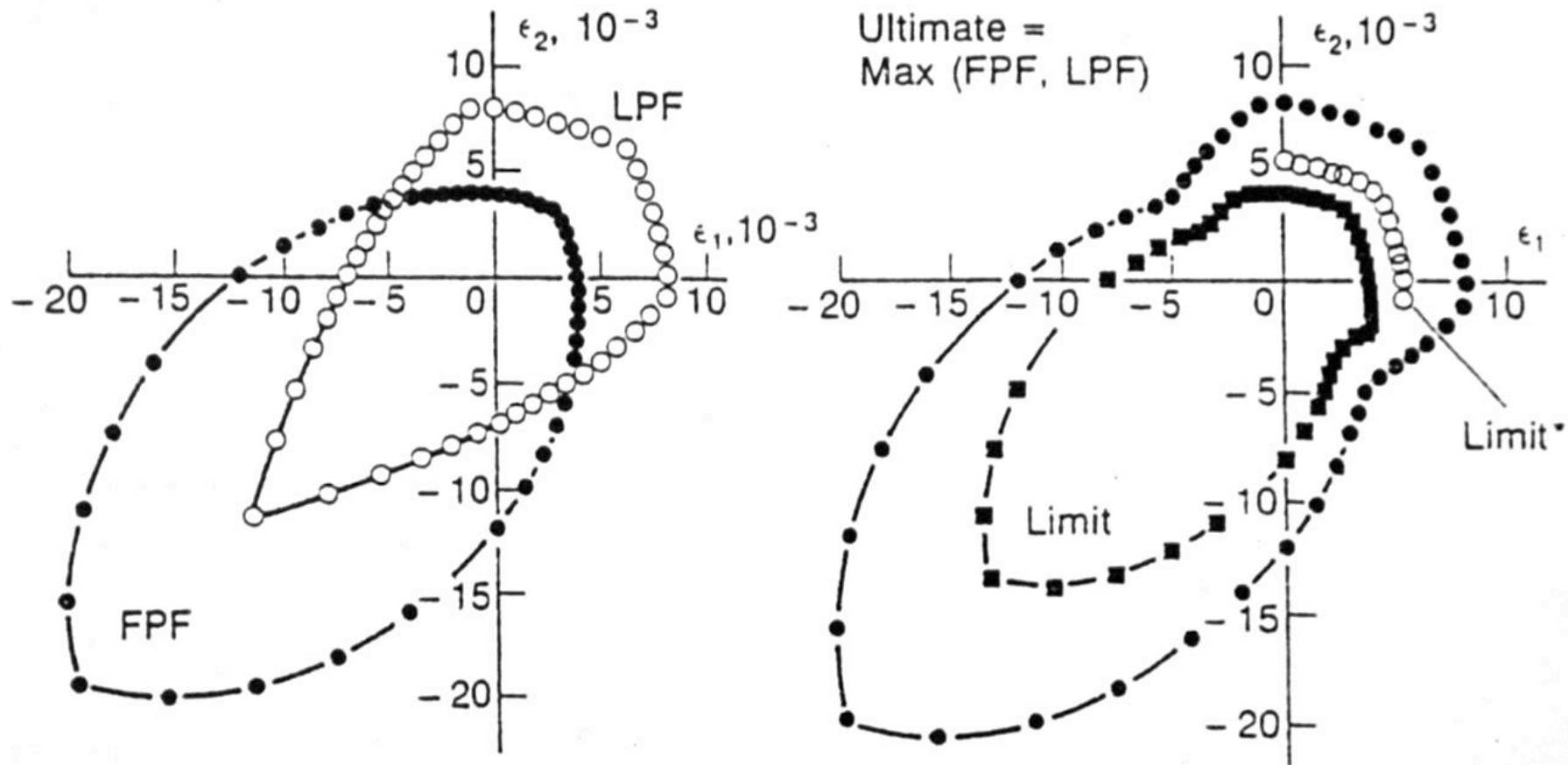
- Resistenza ultima =  $\max(\text{FPF}, \text{LPF})$



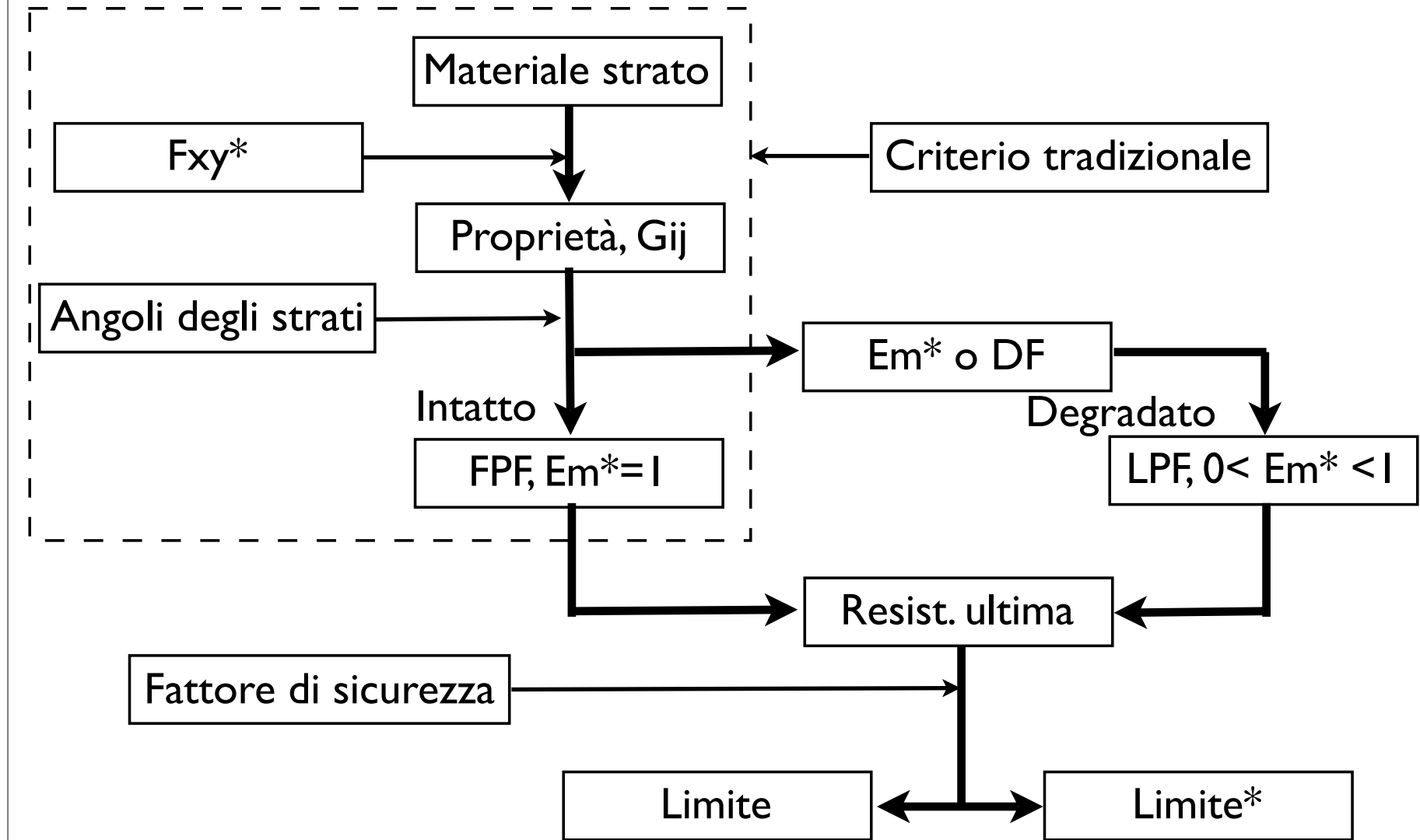
# Limiti di progettazione

- LPF controlla il quadrante tensione-tensione, mentre l'FPF controlla il quadrante compressione-compressione.
- La progettazione si può basare o sulla resistenza ultima o sulla rottura iniziale (FPF).
- Nel caso del limite ultimo si utilizza un fattore di sicurezza e si definisce quindi il limite\*:  
$$\text{limite}^* = \text{resistenza ultima} / \text{fattore di sicurezza}$$
- Per la progettazione basata sull'FPF si usa invece il limite:  
$$\text{limite} = \min(\text{FPF}, \text{limite}^*)$$

# Limite e limite\*



# Diagramma di flusso per la resistenza



# Dimensionamento laminato

- Come si calcola il numero di strati e gli angoli da utilizzare?
- Si usa il “laminare ranking method”
  - Si definisce un sublaminato (o diversi tipi di sublaminati)
  - Si calcolano tutte le possibili varianti nelle orientazioni
  - Per ogni variante si calcola il numero di strati minimo che soddisfa i criteri di progettazione
  - Si ordinano le soluzioni in base al numero di strati risultante per ogni variante
  - Si sceglie la soluzione con il minor numero di strati e migliori proprietà

# Il sublaminato

- Costituisce l'elemento base per il dimensionamento.
- E' possibile dimostrare che non c'è bisogno di utilizzare più di 10 strati per un singolo sublaminato.
- Il numero di angoli possibili per i singoli strati considerando costi e processi di fabbricazione può essere: 2, 3, 4, 5 o 6
- Nel caso di 6 sono:  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $-60^\circ$ , che sono gli angoli più tipici.
- Per una famiglia di sublaminati con 4 orientazioni si definisce un membro della famiglia tramite un codice a 4 indici (ogni indice dà il numero di strati con quella orientazione), tipo: [22|4].



## Tipi di sublaminati e famiglie

- Il lay-up di angoli più comune è  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ$  per laminati a 4 angoli. Per laminati a tre angoli:  $0^\circ, 60^\circ, -60^\circ$ . Se consideriamo 2 angoli si usa:  $0^\circ, 90^\circ$ . 6 angoli:  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 60^\circ, -60^\circ$ . 5 angoli:  $0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 60^\circ, -60^\circ$ .
- In una famiglia di sublaminati abbiamo tutti i possibili sublaminati con un certo numero e tipo di angoli e numero totale di strati. Ad esempio per la famiglia di 2 strati con due angoli  $0^\circ$  e  $90^\circ$  abbiamo un totale di 3 membri:  $[20]$  ( $[0^\circ]$ ),  $[02]$  ( $[90^\circ]$ ) e  $[11]$  ( $[0^\circ/90^\circ]$ ).
- Quanti membri abbiamo nella famiglia di 3 strati con due angoli?
- 4:  $[30]$ ,  $[21]$ ,  $[12]$ ,  $[03]$ . ( $[0^\circ]$ ,  $[0^\circ_2/90^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ_2]$ ,  $[90^\circ]$ )

# Dimensionamento laminato e arrotondamenti

- Cerchiamo di stabilire il numero di sublaminati minimo che soddisfa i requisiti di progetto. Supponiamo che un numero  $n$  di sublaminati non soddisfi i criteri ma  $n+1$  sì. L'aumento di un sublaminato con 10 strati (nel caso simmetrico l'aumento è di 20 strati) può essere molto oneroso, quando magari basterebbero 2-3 strati in più.
- Si utilizza il metodo del round-off:
  - Sia  $(abcd)$  il nostro sublaminato ( $a, b, c, d$  il numero di strati per ogni orientazione) base, cerchiamo un sublaminato round-off  $(ABCD)$  per cui  $A \leq a, B \leq b, C \leq c, D \leq d$  ed inoltre:
    - $(abcd)_{rs}$  non soddisfa il criterio, ma  $(abcd)_{(r+1)s}$  sì.
    - $[(abcd)_r + (ABCD)]_s$  soddisfa al limite il criterio di progettazione

## Dimensioni delle famiglie di sublaminati

Numero strati	2 orientazioni	3 orientazioni	4 orientazioni
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56
6	7	28	84
7	8	36	120
8	9	45	165
9	10	55	220
10	11	66	286
Totale	63	282	996

Esempio membri famiglia di 6 strati, 4 angoli:

0006, 0015, 0024, 0033, 0042, 0051, 0060, 0105, 0114, 0123,  
0132, 0141, ....., 1230, 1302, 1311, 1320, 1401, 1410, .....,  
4200, 5001, 5010, 5100, 6000.

## Esempio ranking per carico singolo

- Possiamo progettare a resistenza o rigidezza
- Nel caso progettiamo a resistenza, possiamo utilizzare il la resistenza limite oppure il limite\*. Preferiremo in genere “limite” poichè più conservativo (non permettiamo di uscire dall'FPF).
- Si può progettare anche a rigidezza e possiamo stabilire un indice per il nostro ranking:
  - possiamo utilizzare come indice la rigidezza (o stabilità elastica) guardando ai moduli elastici
  - oppure un altro buon indice è l'invarianza delle deformazioni
  - $$|\varepsilon|^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{\varepsilon_s^2}{2}$$
  - la minor deformazione invariante corrisponde alla rigidezza maggiore.

## Esempio ranking per carico singolo

- Supponiamo di avere un carico di tensione uniassiale (a)  $(10, 0, 0)$  MN/m o compressione (b)  $(-10, 0, 0)$  MN/m. Usiamo sublaminati da 2 a 10 strati con 4 angoli ( $0^\circ, 90^\circ, 45, -45$ ). Il ranking per resistenza ci dà:

Ranking	Laminato	n strati
1	$[(7000)_5+(5000)]_s$	80
2	$[(6000)_6+(4000)]_s$	80
3	$[(3000)_{13}+(1000)]_s$	80
4	$[(1000)_{40}+(0000)]_s$	80
14	$[(8011)_4+(6000)]_s$	92
61	$[(7111)_6+(1000)]_s$	122
348	$[(2222)_{15}+(1000)]_s$	242

(a)

Ranking	Laminato	n strati
1	$[(9100)_3+(3000)]_s$	66
2	$[(8100)_3+(6000)]_s$	66
3	$[(7100)_4+(1000)]_s$	66
4	$[(6100)_4+(5000)]_s$	66
5	$[(5100)_5+(3000)]_s$	66
52	$[(7111)_4+(6100)]_s$	94
332	$[(2222)_{11}+(2100)]_s$	182

(b)

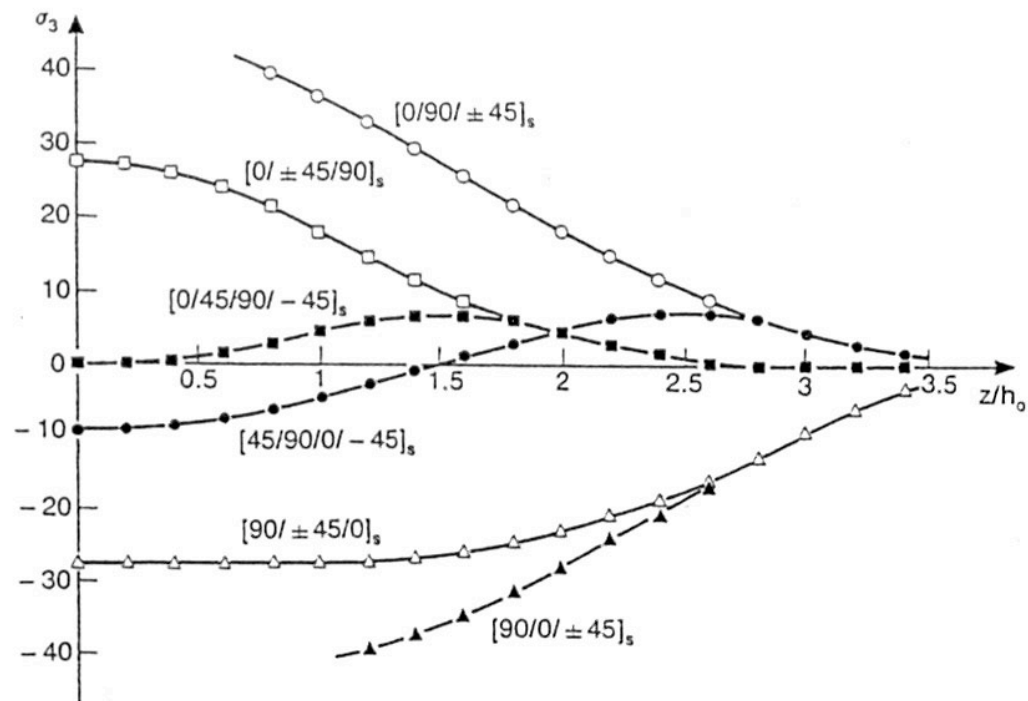
## Esempio carico multiplo

- Supponiamo ora che il carico sia  $(-10, 2, 3)$  in MN/m.
- Il metodo del “carpet plot” assume che noi possiamo scomporre il laminato in tre laminati ognuno dimensionato per le tre forze indipendenti:  $(-10, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, 3)$  MN/m. Eseguiamo il calcolo sia per il carico multiplo (a) che scomposto (b) (ovviamente il primo è quello corretto):

Ranking	Laminato	n strati	Ranking	Laminato	n strati
1	$[(4020)_{14}+(3010)]_s$	176	1	$[(4230)_7+(3000)]_s$	132
2	$[(2010)_{29}+(1000)]_s$	176	2	$[(3220)_9+(3010)]_s$	132
3	$[(6030)_9+(5020)]_s$	176	3	$[(5230)_6+(1230)]_s$	132
4	$[(7030)_9+(0000)]_s$	180	4	$[(4220)_9+(0000)]_s$	144
5	$[(5030)_{11}+(2000)]_s$	180	12	$[(4131)_8+(1121)]_s$	154
33	$[(3111)_{19}+(2001)]_s$	234	18	$[(4122)_8+(3022)]_s$	158
(a) 172	$[(2222)_{17}+(2100)]_s$	278	91	$[(2222)_{11}+(2100)]_s$	182

# Disposizione strati per un buon design

- La cosa più importante è la distribuzione degli angoli nel laminato, poi viene la sequenza con cui vengono impilati.
- Per spessori maggiori si preferisce comunque ripetere il sublaminato piuttosto che sovrapporre strati uguali.



## Disposizione strati per un buon design

- Per minimizzare le forze interlaminari conviene sovrapporre strati nel sublaminato a spirale.
- Esempio sovrapposizione a spirale:  $0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ$  dove nel sublaminato successivo partirà ancora con  $0^\circ$ .
- Esempio sovrapposizione non a spirale:  $0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ$
- Quindi accostare sempre gli strati con meno differenza di angolo.
- Se possibile non vincolarsi a laminati simmetrici. Il laminato simmetrico pone un vincolo in più che può penalizzare la progettazione.
- Evitare la vecchia regola del 10% che imponeva che per un laminato a 4 angoli ci fosse almeno uno strato per ogni angolo.